

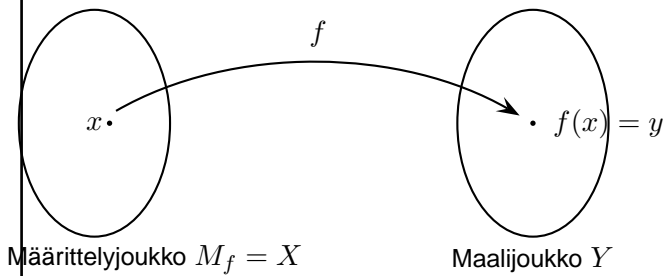
Käänteisfunktio

Hannu Lehto
Lahden Lyseon lukio

Funktio	2
Käänteisfunktio	4
Käänteisfunktion olemassaolo	5
Käänteisfunktion ominaisuuksia	7
Käänteisfunktion tutkiminen	9
Käänteisfunktion derivaatta	10
Käänteisfunktion derivaatta	11

Funktio

Määritelmä 1. Funktio $f : X \rightarrow Y$ liittää jokaiseen määrittelyjoukon X alkioon x tarkalleen yhden maalijoukon Y alkion $y = f(x)$.

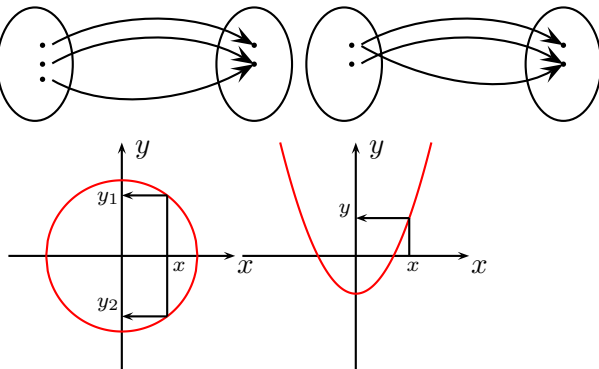


Funktion f arvojoukko on $A_f = \{f(x) | x \in X\}$. Arvojoukko on maalijoukon osajoukko.

2 / 11

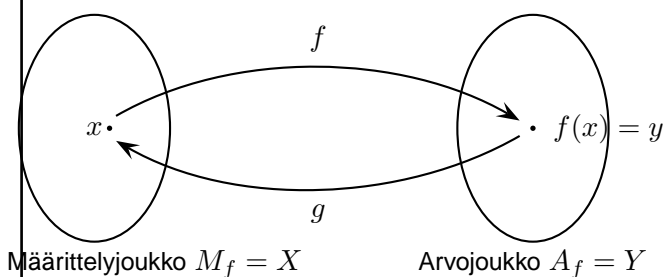
Funktio

Esimerkki 1. Onko kyseessä funktio?



3 / 11

Käänteisfunktio



Määritelmä 2. Funktiot $f : X \rightarrow Y$ ja $g : Y \rightarrow X$ ovat toistensa *käänteisfunktioita*, jos kaikilla alkioilla $x \in X$ ja $y \in Y$ on

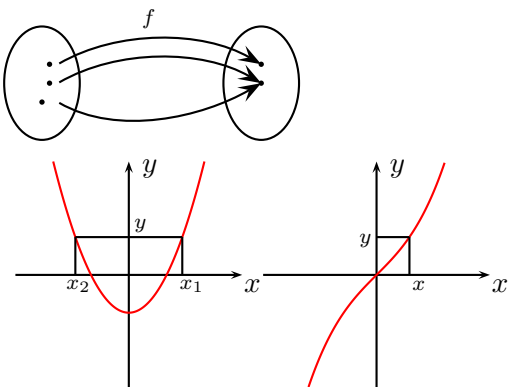
$$g(f(x)) = x \quad \text{ja} \quad f(g(y)) = y$$

Funktion f käänteisfunktioita merkitään f^{-1} .

4 / 11

Käänteisfunktion olemassaolo

Onko seuraavilla funktioilla käänteisfunktio?



Funktion f käänteisfunktion olemassaolon edellytys on, että funktio f saa jokaisen arvonsa täsmälleen yhdessä kohtaa.

5 / 11

Käänteisfunktion olemassaolo

Lause 1. Jokaisella aidosti monotonisella funktiolla on käänteisfunktio.

Esimerkki. Onko funktiolla $y = f(x) = x^3 + x^2 + x$ käänteisfunktio? Myönteisessä tapauksessa laske $f^{-1}(3)$.

6 / 11

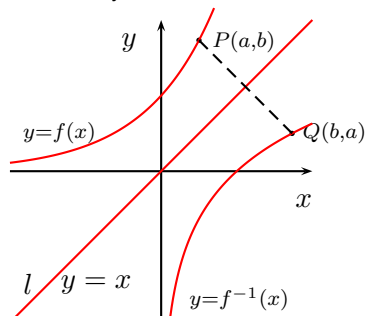
Käänteisfunktion ominaisuuksia

1. $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$
2. $M_{f^{-1}} = A_f$
3. $A_{f^{-1}} = M_f$

7 / 11

Käänteisfunktion ominaisuuksia

4. Funktion ja käänteisfunktion kuvaajat ovat toistensa peilikuvia suoran $y = x$ suhteen

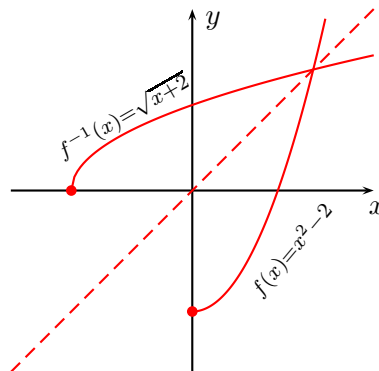


8 / 11

Käänteisfunktion tutkiminen

Esimerkki. Tutki funktion $y = x^2 - 2, x \geq 0$ käänteisfunktiota.

- Olemassaolo
- Määrittely- ja arvojoukot
- Käänteisfunktion lauseke
- Kuvaajat



9 / 11

Käänteisfunktion derivaatta

Lause 2. Olkoon funktiolla f on käänteisfunktio f^{-1} ja olkoon f derivoituva. Jos $y = f(x)$ ja $f'(x) \neq 0$, niin käänteisfunktio f^{-1} on derivoituva kohdassa y ja

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Kaavan johto. Olkoon f ja f^{-1} derivoituvia. ^a

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) &= x \\ D(f^{-1}(f(x))) &= Dx \\ (f^{-1})'(f(x)) f'(x) &= 1 \\ (f^{-1})'(f(x)) &= \frac{1}{f'(x)} \\ (f^{-1})'(y) &= \frac{1}{f'(x)} \end{aligned}$$

10 / 11

^aTämä ei ole lauseen täydellinen todistus, koska derivoituvuutta ei todisteta.

Käänteisfunktion derivaatta

Esimerkki. Funktiolla $y = f(x) = x^3 + x^2 + x$ on käänteisfunktio. Määritä $(f^{-1})'(3)$. (Vastaus: $\frac{1}{6}$)

11 / 11