

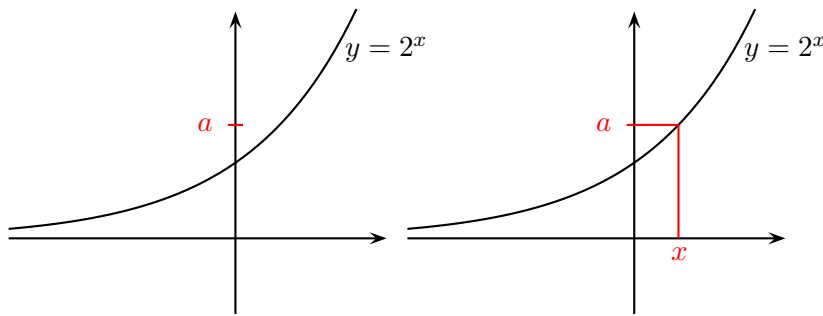
# Logaritmifunktio

Hannu Lehto  
Lahden Lyseon lukio

Esimerkki . . . . .	2
Logaritmifunktio . . . . .	3
Logaritmin määritelmä . . . . .	4
Esimerkkejä . . . . .	5
Tärkeät kantaluvut . . . . .	6
Esimerkkejä: logaritmiyhtälöitä . . . . .	7
Laskusäännöt . . . . .	8
Eksponentiyhtälöt . . . . .	10
Logaritmiyhtälöt . . . . .	11

### Esimerkki

Onko yhtälöllä  $2^x = a$ ,  $a > 0$  ratkaisuja?



Yksi ratkaisu  $x = \log_2 a$  ("k-kantainen logaritmi a:sta").

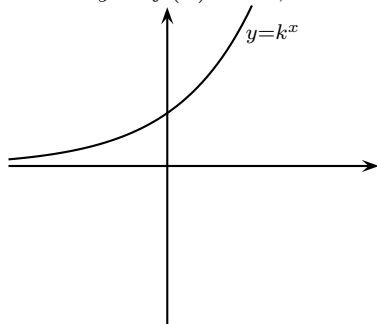
Ratkaise yhtälö  $10^x = 7$ .

$$x = \log_{10} 7 \approx 0.8451$$

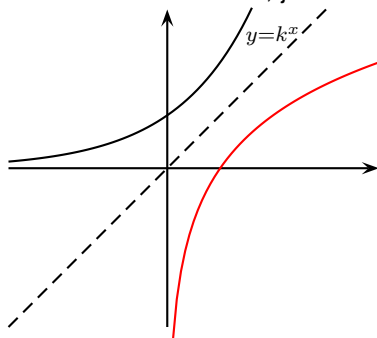
2 / 11

### Logaritmifunktio

Funktio  $y = f(x) = k^x$ ,  $k > 0, k \neq 1$ ,  $M_f = \mathbb{R}$ ,  $A_f = \mathbb{R}_+$



on aidosti monotoninen, joten Funktio  $y = f(x) = k^x$ ,  $k > 0, k \neq 1$ ,  $M_f = \mathbb{R}$ ,  $A_f = \mathbb{R}_+$



on aidosti monotoninen, joten sillä on käänteisfunktio  $f^{-1}$ .

$$x = f^{-1}(y) = \log_k y, \quad M_{f^{-1}} = \mathbb{R}_+, \quad A_{f^{-1}} = \mathbb{R}.$$

Toisin sanoen käänteisfunktio on  $y = \log_k x$ ,  $x > 0$ .

3 / 11

## Logaritmin määritelmä

**Määritelmä 1.** Olkoon  $k > 0$ ,  $k \neq 1$ .

$$y = k^x \Leftrightarrow x = \log_k y, \quad y > 0.$$

$k$ -kantainen logaritmi luvusta  $y$  on eksponentti, johon kantaluku  $k$  on korotettava, jotta saataisiin tulokseksi  $y$ .  
Seurauksena saadaan:

$$k^{\log_k y} = y$$

$$\log_k k^x = x$$

$$\log_k 1 = 0$$

$$\log_k k = 1$$

4 / 11

## Esimerkkejä

1.  $\log_3 27$
2.  $\log_5 1$
3.  $\log_5 \frac{1}{25}$
4.  $\log_3 \frac{1}{3\sqrt{3}}$

5 / 11

## Tärkeät kantaluvut

- Luonnollinen logaritmi:  $\log_e x = \ln x$
- Briggsin logaritmi:  $\log_{10} x = \lg x$

Esimerkki. Sievennä  $\ln \frac{1}{\sqrt{e}}$

6 / 11

## Esimerkkejä: logaritmiyhtälöitä

1.  $\log_3 x = 4$
2.  $\log_x 9 = 2$
3.  $10^x = 2$
4.  $e^{-x} = 2$

7 / 11

## Laskusäännöt

**Lause 1.** Olkoon  $a > 0, b > 0, k > 0, k \neq 1$ .

1.  $\log_k ab = \log_k a + \log_k b$
2.  $\log_k \frac{a}{b} = \log_k a - \log_k b$
3.  $\log_k a^n = n \log_k a$
4.  $\log_b a = \frac{\log_k a}{\log_k b}, \quad b \neq 1$

Esimerkkejä.

1. Esitä yhtenä logaritmina
  - a)  $\log_3 2a + \log_3 5a^2$
  - b)  $\log_4 8a - \frac{1}{2} \log_4 16a$

8 / 11

## Esimerkkejä

2. Laske likiarvo luvulle  $\log_2 3$ .
3. Laske likiarvo luvulle  $2^{5000}$ .
4. Sievennä  $\ln \frac{1}{\sqrt{e}}$

9 / 11

## Ekspontiyhtälöt

**Lause 2.** Olkoon  $a, b > 0$ . silloin on

$$a = b \Leftrightarrow \log_k a = \log_k b.$$

Esimerkkejä.

1.  $2^x = 3$
2. Maapallon väkiluku kasvaa 1,2% vuodessa. Monenko vuoden kuluttua väkiluku on kaksinkertainen, jos oletetaan, että vuotuinen väkiluvun kasvu säilyy samana.

10 / 11

## Logaritmiyhtälöt

Esimerkkejä.

1.  $2 \log_9(x + 2) = 1$
2.  $\ln x + \ln(2x + 3) = 0$
3.  $\ln(x - 2) - \ln(2x + 1) = 1$

11 / 11